30/03/2019

ΚΕΦ. 3 : Ολόμορφες συναρτήσεις

Ορισμός: Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, και $z_0 \in D$

$f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0

αν υπάρχει το όριο :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

το οποίο τότε :

ονομάζεται μιγαδική παράγωγος της f στο z_0 (ή $\mathbb{C}$-παράγωγος).

Αν η f είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη σε κάθε $z_0 \in D$, τότε η $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται ολόμορφη, και αν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε η $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

ονομάζεται ακέραια

Παραδείγματα:

① $f(z) = c, \forall z \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ (σταθερή συνάρτηση)
$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{c-c}{z-z_0} = 0 = f'(z_0)$$

Άρα η σταθερή είναι ακέραια με $f'(z) = 0$

② (Ταυτοτική) : $f(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1$$

Η ταυτοτική είναι ακέραια με $f'(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$

③ $\forall n \in \mathbb{N}$ η $f(z) = z^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραια, αφού $\forall z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \begin{cases} n \cdot z_0^{n-1} & , \text{για } z_0 \neq 0 \\ \lim_{z \to 0} z^{n-1} & , \text{για } z_0 = 0 \end{cases}$$

- Για να καταλάβουμε τη σχέση μεταξύ μιας $f: D \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ διαφορίσιμη στο $z_0 \in D$ με την ($\mathbb{R}$-) διαφορισιμότητα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{Re} f(x+iy) \\ \mathrm{Im} f(x+iy) \end{bmatrix} \quad , \quad (x,y) \in D$$

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

<u>Λήμμα:</u> Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $z_0 \in D$ είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο $z_0 \iff$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}: \quad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \quad (*)$$

και τότε:

το λ είναι μοναδικό και: $\lambda = f'(z_0)$.

<u>Απόδειξη:</u>

$(\Rightarrow)$ $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ για $\lambda = f'(z_0)$ ικανοποιείται ο ισχυρισμός

$(\Leftarrow)$ Αν $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $(*)$ τότε (από άλγεβρα των ορίων) έχουμε:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0) + \lambda(z - z_0)}{z - z_0} =$$

$$= 0 + \lambda = \lambda$$

Συνεπώς: $\lambda = f'(z_0)$ $\square$

- Μια μιγαδική συνάρτηση $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ θα τη λέμε <u>$\mathbb{C}$-γραμμική</u> αν έχει τη μορφή:

$$z \longmapsto \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ σταθερό}$$

[Εξ' ορισμού : $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-γραμμική αν

$\forall \lambda, \mu, z, w \in \mathbb{C}$: $f(\lambda z + \mu w) = \lambda \cdot f(z) + \mu f(w) \Rightarrow$

$\overset{z=1}{\underset{\mu=0}{\Longrightarrow}} f(\lambda) = \lambda f(1)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \xRightarrow[\lambda = z]{} f(z) = f(1) z, \forall z \in \mathbb{C}$]

Η $\mathbb{C}$-γραμμική συνάρτηση $z \longmapsto \lambda z$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί μοναδικά στο διανυσματικό πεδίο $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} Re((\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy)) \\ Im((\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

όπου : $\lambda z = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy) = \lambda_1 x - \lambda_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y) =$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \lambda_2 x + \lambda_1 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Είδαμε, ότι η $\mathbb{C}$-γραμμική $f(z)=\lambda z$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$, αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix}}_{=\Lambda}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

με $z=x+iy$, $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$.

Από τα προηγούμενα (1) αντιστοίχιση μιας $f:D\to\mathbb{C}$ σε ένα διαν. πεδίο $\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)\in D$, (2) Λήμμα, (3) $z\longmapsto\lambda z$ αντιστοιχεί στο $\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$)

και επειδή:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0}=0 \iff$$

$$\iff \lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)|}{|z-z_0|}=0 \iff$$

$$\iff \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{|z-z_0|}=0 \iff$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y)-\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x_0,y_0)-\Lambda\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}}{\|(x-x_0,\ y-y_0)\|}=0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}:D\to\mathbb{R}^2 \text{ είναι διαφορίσιμο στο } (x_0,y_0)$$

με Παράγωγο: $\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}(x_0,y_0)=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix}\in D\subset\mathbb{R}^2$

Συνεπώς, καταλήξαμε:

(S.O.S) **Θεώρημα:** Η μιγαδική συνάρτηση $f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ με $u,v:D\to\mathbb{R}$, όπου $D\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτό, είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο $z_0=x_0+iy_0\in D\subset\mathbb{C}$ $\iff$ η u,v είναι ($\mathbb{R}$-) διαφορίσιμες στο $(x_0,y_0)\in D\subset\mathbb{R}^2$ **και** ισχύουν εκεί οι εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\ v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0)\end{cases}$$

Θα μπορούσαμε:

$$\lim_{x+iy \to x_0+iy_0} \frac{Re\left[f(x+iy) - f(x_0+iy_0) - (\lambda(x-x_0+iy-y_0))\right]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$$

και αντίστοιχα με Im αντί για Re

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)-(\lambda_1 - \lambda_2)\cdot(x-x_0, y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ u διαφ. στο (x_0,y_0) $\nabla u(x_0,y_0) = (\lambda_1 - \lambda_2)$ [αντίστοιχα για v]

<u>Υπενθύμιση</u>:

$$\underbrace{D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0)}_{} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(x_0,y_0)$$

$$= \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Επίσης, από το Λήμμα έχουμε : $f'(z_0) = \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 =$

$$= u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0)$$

$$=: f_x(x_0+iy_0)$$

$$\left[= \frac{\partial}{\partial x} f(x_0+iy_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)\right) \right]$$

$$= v_y(x_0,y_0) + i(-u_y(x_0,y_0))$$

$$= -i\left(u_y(x_0,y_0) + i v_y(x_0,y_0)\right)$$

$$= -i f_y(x_0+iy_0)$$

Δηλαδή : $\boxed{f'(z_0) = f_x(x_0+iy_0) = -i f_y(x_0+iy_0)}$

Ουσιαστικά, αυτές είναι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

Παρατήρηση - Παράδειγμα: (S.O.S - αυτ)

Τι συμβαίνει για (R-)γραμμικά διανυσματικά πεδία στο $\mathbb{R}^2$;

Ποια αντιστοιχούν σε $\mathbb{C}$-διαν. μιγ. συναρτήσεις;

Κάθε (R-)γραμμικό διανυσματικό πεδίο $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{με } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \text{ και } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Όλα αυτά είναι (R-) διαφορίσιμα με παράγωγο $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[Σύμφωνα με το Θ.C.R από όλα αυτά (δηλ. από όλα τα R-γραμμικά διαν. πεδία) αντιστοιχούν σε $\mathbb{C}$-διαφ. (ακέραιες) μιγ. συναρτήσεις μόνο αυτά με $\alpha = \delta$, $\gamma = -\beta$]

Αυτό αντιστοιχεί σε μια μιγαδική συνάρτηση:

$$f(\underbrace{x+iy}_{=z}) = (\alpha x + \beta y) + i(\gamma x + \delta y) = \underbrace{(\alpha + i\gamma)}_{=:a} x + \underbrace{(\beta + i\delta)}_{=:b} y \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow[y = \frac{z-\bar{z}}{2i}]{x = \frac{z+\bar{z}}{2}} f(x+iy) = a\,\frac{z+\bar{z}}{2} + b\,\frac{z-\bar{z}}{2i} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)}_{=:\lambda} z + \underbrace{\frac{1}{2}(a+ib)}_{=:\mu} \bar{z}$$

Συνεπώς: όλα τα (R)γραμμικά διανυσματικά πεδία αντιστοιχούν 1-1 και επί με μιγαδικές συναρτήσεις της μορφής: $f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ οι οποίες ονομάζονται R-γραμμικές (μιγ. συναρτήσεις) και οι $\mathbb{C}$-γραμμικές $f(z) = \lambda z$ είναι η ειδική περίπτωση με $\mu = 0$

Το $\mu = 0 \Leftrightarrow a = -ib \Leftrightarrow \alpha + i\gamma = -i\beta + \delta \Leftrightarrow \alpha = \delta \wedge \gamma = -\beta$

Συνεπώς, οι $\mathbb{C}$-γραμμικές αντιστοιχούν σε (R-) γραμμικά διανυσματικά πεδία: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$

(S.O.S.) Σύμφωνα με το Θ.C.R. από όλες τις $\mathbb{R}$-γραμμικές μιγαδικές συναρτήσεις $f(z)=\lambda z+\mu\bar{z}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, μόνο οι $\mathbb{C}$-γραμμικές $f(z)=\lambda z$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμες (ενώ όλες οι $\mathbb{R}$-γραμμικές είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμες)

Η παραπάνω παρατήρηση συμφωνεί με το εξής (είναι ισοδύναμη):
Για $\mathbb{C}$-γραμμικές: $f(z)=\lambda z$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$, έχουμε:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lambda=f'(z_0)$$

Δηλαδή είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμες $\cancel{\left[\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)\ f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0}\right.}$

$$\left[\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{0}{z-z_0}=0\right]$$

ενώ για $\mathbb{R}$-γραμμικές αλλά όχι για $\mathbb{C}$-γραμμικές, δηλ. για $f(z)=\lambda z+\mu\bar{z}$, $\mu\neq 0$, ~~το όριο~~

$$\cancel{\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)\quad \mu(\bar{z}-\bar{z}_0)}{z-z_0}\ \nexists\ \text{για κανένα } z_0}$$

~~αφού αν υπάρχει~~

$$\nexists\ \tilde{\lambda}\in\mathbb{C} \text{ με } \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-\tilde{\lambda}(z-z_0)}{z-z_0}=0$$

(δηλ. $\underset{\text{Λήμμα}}{\Longleftrightarrow}$ η $f(z)$ δεν είναι μιγ. διαφ. στο z_0)

$$\Leftrightarrow\ \nexists\ \tilde{\lambda}\in\mathbb{C} \text{ με } \lim_{z\to z_0}\frac{(\lambda-\tilde{\lambda})(z-z_0)-\mu(\bar{z}-\bar{z}_0)}{z-z_0}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{w\to 0}\frac{(\lambda-\tilde{\lambda})w+\mu\bar{w}}{w}=0$$, αφού αν υπήρχε τέτοιο $\tilde{\lambda}\in\mathbb{C}$

τότε θα είχαμε (άλγεβρα ορίων):

$$\lim_{w\to 0}\frac{\bar{w}}{w}=\lim_{w\to 0}\left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu\bar{w}}{w}+\frac{(\lambda-\tilde{\lambda})\bar{w}}{w}\right)+\frac{1}{\mu}(\tilde{\lambda}-\lambda)\right]=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\mu}\lim_{w\to 0}\frac{\mu\bar{w}+(\lambda-\tilde{\lambda})w}{w}}_{=0}+\frac{\tilde{\lambda}-\lambda}{\mu},\ (\mu\neq 0)$$

$$=\frac{\tilde{\lambda}-\lambda}{\mu}$$, το οποίο όμως δεν υπάρχει, αφού:

$$\lim_{w\to 0}\frac{\bar{w}}{w}\ \nexists$$

Συνεπώς: $\mathbb{R}$-γραμμικές: $f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ πάντα $\mathbb{R}$-διαφορίσιμες, αλλά $\mathbb{C}$-διαφ. μόνο οι $\mathbb{C}$-γραμμ. (με $\mu = 0$).

Εφαρμογή / Παρατήρηση: Ένα διανυσματικό πεδίο $\binom{u}{v} : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, ονομάζεται ($\mathbb{R}$-)διαφορίσιμη στο $(x_0, y_0) \in D \iff$
$\iff \exists$ ($\mathbb{R}$-) γραμμική συνάρτηση $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\binom{u}{v}(x,y) - \binom{u}{v}(x_0,y_0) - A\binom{x-x_0}{y-y_0}}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

και $A = D\binom{u}{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$.

Αυτό το διαν. πεδίο αντιστοιχεί στη μιγ. συνάρτηση $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ και με τον συμβολισμό: $\lambda = \frac{a - ib}{2}$, $\mu = \frac{a+ib}{2}$,

$a = \alpha + i\gamma$, $b = \beta + i\delta$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$
το πιο πάνω όριο ισοδυναμεί με:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0) - \mu(\bar{z} - \bar{z}_0)}{z - z_0} = 0$$

και λέμε ότι αν ισχύει αυτό η f είναι ($\mathbb{R}$-)διαφορίσιμη στο z_0 με $\mathbb{R}$-παράγωγο στο z_0 την $\mathbb{R}$-γραμμ. μιγ. συνάρτηση:

$df_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, με:

$$df_{z_0}(z) = u_x(x_0,y_0)\,x + u_y(x_0,y_0)\,y + i\left(u_x(x_0,y_0)\,x + v_y(x_0,y_0)\,y\right)$$

$$= (u_x + iv_x)\,x + (u_y + iv_y)\,y \underset{\text{συμβολισμός}}{=\!=}$$

$$= ax + by = \lambda z + \mu \bar{z}$$, με τον πιο πάνω συμβολισμό

Άσκηση

Εισάγοντας, τις μερικές παραγώγους μιας μιγαδικής συνάρτησης ως
$f_x(x_0+iy_0) := u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$ (και αντίστοιχα για y)
Λέμε ότι η $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι μερικώς διαφ. στο
$z_0 = x_0 + iy_0$ αν αυτές υπάρχουν.
Μάλιστα ισχύει $(f+g)_x = f_x + g_x$

$(fg)_x = f_x g + f g_x$ Άσκηση

Αν οι $u_x, v_x, u_y, v_y : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό,
$\exists$ και είναι $C \Rightarrow \binom{u}{v}$ διαφ. στο $D \Rightarrow$

$\Rightarrow$ αν οι $f_x, f_y : D \to \mathbb{C}$ $\underbrace{\exists \text{ και είναι } C}_{\iff f \in C^1(D)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη.
Τότε (αν $f \in C^1(D)$) : η $\mathbb{R}$-παράγωγος της f είναι :

$$df_{z_0}(z) = f_x(x_0+iy_0)x + i f_y(z_0) y$$

και αν η f είναι (επιπλέον) $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη, δηλ. εξ. CR,
τότε :

$$df_{z_0}(z) = \underbrace{\left(u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)\right)}_{= f_x(x_0+iy_0)} x + \underbrace{\left(-v_x(x_0,y_0) + i \cdot u_x(x_0,y_0)\right)}_{= i f_x(x_0+iy_0)} y =$$

$$= f_x \underbrace{(x_0+iy_0)}_{=z_0} \underbrace{(x+iy)}_{=z} = f'(z_0)$$

Συνεπώς: $\mathbb{C}$-διαφ. $= \mathbb{R}$-διαφ. $+$ CR και τότε :

$$\underbrace{df_{z_0}}_{\mathbb{R}\text{-παραγ.}} = \underbrace{f'(z_0)}_{C\text{-παραγ.}} \quad \text{και} \quad f'(z_0) = f_x(z_0) = i f_y(z_0)$$

Παρατήρηση: Όπως ορίζονται οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης μιας
$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ορίζονται και οι μ.π. ανώτερης
τάξης, $f \in C^k(D) \iff u = \mathrm{Re} f \wedge v = \mathrm{Im} f \in C^k(D)$,
$D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

και φυσικά ισχύει το Θ. Schwarz
$f \in C^2(D) \Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$

Από τον ορισμό της παραγώγου μιγ. συναρτ. $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

Προκύπτουν (όπως σε συναρτησ. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ή αντιστ. με χρήση $\mathbb{R}$-διαφ. διαν. πεδίων), τα ακόλουθα:

1. $f : D \to \mathbb{C}$ μιγ. διαφ. στο $z_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο z_0
2. άλγεβρα παραγώγων: $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
$$(fg)' = f'g + g'f$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g(z_0) \neq$$

3. Κανόνας αλυσίδας: $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$

Παράδειγμα:

4. Η εκθετική συνάρτηση $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια, αφού $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) =$
$= u(x,y) + i v(x,y)$ με $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

($\Rightarrow \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη) και
$$u_x(x,y) = e^x \cos y = v_y(x,y)$$
$$v_x(x,y) = e^x \sin y = -u_y(x,y)$$
(άρα οι εξισώσεις CR ισχύουν)

με παράγωγο:
$$\underbrace{(e^z)'}_{= f(z)} = \underbrace{u_x(x,y) + i v_x(x,y)}_{= f_x(z)} = e^z$$

Άρα: $\boxed{(e^z)' = e^z}$

Παράδειγμα / Άσκηση:

5. Δείξτε ότι η $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ δεν είναι σε κανένα $z_0 \in \mathbb{C}$ μιγ. διαφ.:
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \quad \nexists \text{ για κανένα } z_0 \in \mathbb{C}$$